Corrigé – 2021 juin Jour 2 – Métropole – Candidat libres

Partie 1

Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $h(x) = 1 + \dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

1. + Limite en 0 : $h(x) = 1 + \dfrac{1}{x} \times \dfrac{\ln(x)}{x}$.

   On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty$; donc par produit de limites $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = -\infty$.

   + Limite en $+\infty$: on sait que $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, donc par produit et somme de limites : $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 1$. (La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la représentation graphique de h en $+\infty$.)

2. La fonction est dérivable (admis) sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :

   $h'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x\ln(x)}{x^4} = \dfrac{x - 2x\ln(x)}{x^4} = \dfrac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$.

3. Sur $]0\,;\,+\infty[$, $x > 0$ donc $x^3 > 0$: le signe de $h'(x)$ est donc celui du numérateur $1 - 2\ln x$.

   + $1-2\ln x > 0 \iff 1 > 2\ln x \iff \dfrac{1}{2} > \ln x \iff \ln x < \dfrac{1}{2}$, soit finalement $x < \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ (ou encore $x < \sqrt{\mathrm{e}}$)

4. D'après les résultats précédents, on établit le tableau de variations de h sur $]0\,;\,+\infty[$.

   $h\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = 1 + \dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)^2} = 1 + \dfrac{\frac{1}{2}}{\mathrm{e}} = 1 + \dfrac{1}{2\mathrm{e}} \approx 1{,}18$

x	0		$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$h(x)$	‖ $-\infty$	↗	$1 + \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$	↘	1

   D'après ce tableau de variations, l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right[$.

   On appelle α cette solution; $h\left(\dfrac{1}{2}\right) \approx -1{,}8 < 0$ et $h(1) = 1 > 0$ donc $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

5. D'après les questions précédentes, on peut établir le tableau signes de $h(x)$ pour x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
$h(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Partie 2

On désigne par f_1 et f_2 les fonctions définies sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f_1(x) = x - 1 - \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ et $f_2(x) = x - 2 - \dfrac{2\ln(x)}{x^2}$.

On note $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les représentations graphiques respectives de f_1 et f_2 dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Pour tout nombre réel x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$f_1(x) - f_2(x) = x - 1 - \frac{\ln(x)}{x^2} - \left(x - 2 - \frac{2\ln(x)}{x^2}\right) = x - 1 - \frac{\ln(x)}{x^2} - x + 2 + \frac{2\ln(x)}{x^2} = 1 + \frac{\ln(x)}{x^2} = h(x)$$

2.
   - On a vu que $h(x) < 0$ sur $]0\ ;\ \alpha[$, donc sur cet intervalle $f_1(x) < f_2(x)$ donc $\mathscr{C}_1$ est en dessous de $\mathscr{C}_2$.
   - On a vu que $h(x) > 0$ sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$, donc sur cet intervalle $f_1(x) > f_2(x)$ donc $\mathscr{C}_1$ est au dessus de $\mathscr{C}_2$.
   - $h(\alpha) = 0$ donc $f_1(\alpha) = f_2(\alpha)$; donc α est l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
   - L'ordonnée de ce point d'intersection est $f(\alpha) = \alpha - 1 - \dfrac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} = \alpha - \left(1 + \dfrac{\ln(\alpha)}{\alpha^2}\right) = \alpha - h(\alpha) = \alpha$.
   - Les deux courbes se coupent donc au point de coordonnées $(\alpha\ ;\ \alpha)$.